フラックス計算（座標変換について）メモその２：　田中広樹　20031002

０．定義

直交３次元座標系 $X-Y-Z$ 空間において、風速 $(x,y,z)=(\overline{x}+x',\overline{y}+y',\overline{z}+z')$ が得られる時、原点を共有する直交３次元座標系 $U-V-W$ 空間における風速ベクトル $(u,v,w)=(\overline{u}+u',\overline{v}+v',\overline{w}+w')$ を考える。この時、$U-V$ 平面は、$X-Y-Z$ 空間において、$aX+bY+cZ=0$ と表されるものとする。ただし、$a^2+b^2+c^2=1$ である。W 軸は $U-V$ 平面と直交する直線 $\dfrac{X}{a}=\dfrac{Y}{b}=\dfrac{Z}{c}$ である。また、U 軸は、点 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ の $U-V$ 平面への垂線と $U-V$ 平面との交点を通り、V 軸は、W 軸および U 軸と直交する直線である。

１．鉛直風速の導出

$\vec{w}=(aw,bw,cw)$ と表せ、ベクトル (aw,bw,cw) は、ベクトル $(x-aw,y-bw,z-cw)$ と直交する。

$$a(x-aw)+b(y-bw)+c(z-cw)=0$$

$$(a^2+b^2+c^2)w=ax+by+cz$$

$$w=ax+by+cz$$

２．水平主風向風速の導出

$\vec{u}=(d\overline{u},e\overline{u},f\overline{u})$ とする。ただし、$d^2+e^2+f^2=1$ である。ベクトル $(d\overline{u},e\overline{u},f\overline{u})$ は、$U-V$ 平面と平行である。

$$ad+be+cf=0 \qquad (1)$$

また、ベクトル $(\overline{x}-d\overline{u},\overline{y}-e\overline{u},\overline{z}-f\overline{u})$ は $U-V$ 平面と直交する。

$$\frac{\overline{x}-d\overline{u}}{a}=\frac{\overline{y}-e\overline{u}}{b}=\frac{\overline{z}-f\overline{u}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad e=\frac{a\overline{y}-b\overline{x}+bd\overline{u}}{a\overline{u}}、\quad f=\frac{a\overline{z}-c\overline{x}+cd\overline{u}}{a\overline{u}} \qquad (2)$$

したがって、(1)に代入すると、

$$ad+b\frac{a\overline{y}-b\overline{x}+bd\overline{u}}{a\overline{u}}+c\frac{a\overline{z}-\overline{cx}+cd\overline{u}}{a\overline{u}}=0$$

$$\Rightarrow \quad d=\frac{\overline{x}-a(a\overline{x}+b\overline{y}+c\overline{z})}{\overline{u}}=\frac{\overline{x}-a\overline{w}}{\overline{u}}$$

さらに、(2)に代入して、$a^2+b^2+c^2=1$ を考えると、

$$e=\frac{\overline{y}-b(a\overline{x}+b\overline{y}+c\overline{z})}{\overline{u}}=\frac{\overline{y}-b\overline{w}}{\overline{u}}$$

$$f=\frac{\overline{z}-c(a\overline{x}+b\overline{y}+c\overline{z})}{\overline{u}}=\frac{\overline{z}-c\overline{w}}{\overline{u}}$$

さらに、$d^2+e^2+f^2=1$ に代入して、整理すると、

$$\bar{u}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2$$

$$\bar{u} = \pm\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2} = \pm\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2}$$

一方、U 軸は$\dfrac{X}{d} = \dfrac{Y}{e} = \dfrac{Z}{f}$で表される直線であり、$\vec{u} = (du, eu, fu)$と表せ、ベクトル$(x - du, y - eu, z - fu)$と直交する。

$$u = dx + ey + fz$$

$$= \pm\frac{\bar{x}x + \bar{y}y + \bar{z}z - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})(ax + by + cz)}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2}}$$

$$= \pm\frac{(\bar{x} - \bar{w})x + (\bar{y} - \bar{w})y + (\bar{z} - \bar{w})z}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2}} = \frac{(\bar{x} - \bar{w})x + (\bar{y} - \bar{w})y + (\bar{z} - \bar{w})z}{\bar{u}}$$

3．水平直交風速の導出

最後に、$\vec{v} = (gv, hv, iv)$とする。ただし、$g^2 + h^2 + i^2 = 1$である。ベクトル(gv, hv, iv)は、直線$\dfrac{X}{a} = \dfrac{Y}{b} = \dfrac{Z}{c}$、および、直線$\dfrac{X}{\bar{x} - a(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})} = \dfrac{Y}{\bar{y} - b(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})} = \dfrac{Z}{\bar{z} - c(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})}$と直交する。

$$ag + bh + ci = 0$$

$$\left[\bar{x} - a(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})\right]g + \left[\bar{y} - b(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})\right]h + \left[\bar{z} - c(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})\right]i = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{c\bar{x} - a\bar{z}}{b\bar{z} - c\bar{y}}g \text{、} i = \frac{a\bar{y} - b\bar{x}}{b\bar{z} - c\bar{y}}g$$

これらを、$g^2 + h^2 + i^2 = 1$に代入する。

$$(b\bar{z} - c\bar{y})^2 g^2 + (c\bar{x} - a\bar{z})^2 g^2 + (a\bar{y} - b\bar{x})^2 g^2 = (b\bar{z} - c\bar{y})^2$$

$$g^2 = \frac{(b\bar{z} - c\bar{y})^2}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2}$$

$$g = \pm\frac{b\bar{z} - c\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2}} = \frac{b\bar{z} - c\bar{y}}{\bar{u}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{c\bar{x} - a\bar{z}}{\bar{u}} \text{、} i = \frac{a\bar{y} - b\bar{x}}{\bar{u}}$$

したがって、V 軸は、$\dfrac{X}{b\bar{z} - c\bar{y}} = \dfrac{Y}{c\bar{x} - a\bar{z}} = \dfrac{Z}{a\bar{y} - b\bar{x}}$と表される。ここで、ベクトル$(gv, hv, iv)$は、ベクトル$(x - gv, y - hv, z - iv)$と直交する。

$$v = gx + hy + iz$$

$$= \pm \frac{(b\bar{z} - c\bar{y})x + (c\bar{x} - a\bar{z})y + (a\bar{y} - b\bar{x})z}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})^2}} = \pm \frac{(b\bar{z} - c\bar{y})x + (c\bar{x} - a\bar{z})y + (a\bar{y} - b\bar{x})z}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2}}$$

$$= \frac{(b\bar{z} - c\bar{y})x + (c\bar{x} - a\bar{z})y + (a\bar{y} - b\bar{x})z}{\bar{u}}$$

以上より、座標変換は以下のように表される。

$$(u, v, w) = \left(\frac{(\bar{x} - \bar{w})x + (\bar{y} - \bar{w})y + (\bar{z} - \bar{w})z}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2}}, \frac{(b\bar{z} - c\bar{y})x + (c\bar{x} - a\bar{z})y + (a\bar{y} - b\bar{x})z}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2}}, ax + by + cz \right)$$

ただし、$\bar{w} = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}$ である。

4．フラックスの算出

剪断応力 $\overline{w'u'}$ は、以下のように表される。

$$\overline{w'u'} = \overline{(w - \bar{w})(u - \bar{u})} = \overline{wu} - \bar{w}\bar{u}$$

$$= \overline{(ax + by + cz)(dx + ey + fz)} - \overline{(ax + by + cz)}\,\overline{(dx + ey + fz)}$$

$$= \overline{(a\bar{x} + ax' + b\bar{y} + by' + c\bar{z} + cz')(d\bar{x} + dx' + e\bar{y} + ey' + f\bar{z} + fz')} - \overline{(ax + by + cz)}\,\overline{(dx + ey + fz)}$$

$$= ad\overline{x'^2} + be\overline{y'^2} + cf\overline{z'^2} + (ae + db)\overline{x'y'} + (bf + ec)\overline{y'z'} + (cd + fa)\overline{z'x'}$$

つまり、剪断応力 $\overline{w'u'}$ は、風速各成分の分散と各成分間の共分散で表現される。

また、任意のパラメータ T との共分散 $\overline{w'T'}$ は、以下のように表される。

$$\overline{w'T'} = \overline{(w - \bar{w})(T - \bar{T})} = \overline{wT} - \bar{w}\bar{T}$$

$$= \overline{(ax + by + cz)T} - \overline{(ax + by + cz)}\bar{T}$$

$$= a\overline{xT} + b\overline{yT} + c\overline{zT} - (a\bar{x}\bar{T} + b\bar{y}\bar{T} + c\bar{z}\bar{T})$$

$$= a\overline{x'T'} + b\overline{y'T'} + c\overline{z'T'}$$

つまり、共分散 $\overline{w'T'}$ は、風速各成分とパラメータ T の共分散で表現される。